$$= \left(\int (y_s^2 + z_s^2)\,dm\right) p_s \vec{i_s}$$
$$+ \left(\int (z_s^2 + x_s^2)\,dm\right) q_s \vec{j_s}$$
$$+ \left(\int (x_s^2 + y_s^2)\,dm\right) r_s \vec{k_s}$$

$$-\left(\int (x_s z_s)\,dm\right) p_s \vec{k_s}$$

$$= \left(I_{x_s} p_s - P_{x_s y_s} q_s - P_{y_s z_s} r_s\right)\vec{i_s}$$
$$+ \left(-P_{y_s z_s} p_s + I_{y_s} q_s - P_{x_s z_s} r_s\right)\vec{j_s}$$
$$+ \left(-P_{x_s z_s} p_s - P_{y_s z_s} q_s + I_{z_s} r_s\right)\vec{k_s}$$

ثم نأخذ المساقط على المحاور الاصلية

$\sigma_{x_s} =$ (القوس الأول)

$\sigma_{y_s} =$ (القوس الثاني)

$\sigma_{z_s} =$ (القوس الثالث)

وبالتالي:

$$\sigma_{x_s} = A\,p_s - F\,q_s - E\,r_s$$
$$\sigma_{y_s} = -F\,p_s + B\,q_s - D\,r_s$$
$$\sigma_{z_s} = -E\,p_s - D\,q_s + C\,r_s$$

انتهت المحاضرة الثانية

المحاضرة الثالثة

- تعرفنا في المحاضرة السابقة على مفهوم كمية ... مفهوم العزم الزاوي بطريقة ... وهو تعميم لمفهوم كمية الحركة لنقطة.
وعرفنا العزم الحركي للأوساط المتصلة (موضوع الدراسة) من أجل الجسم الصلب وتعرفنا على مفهوم الطاقة الحركية لمجموعة وهو تعميم لمفهوم الطاقة الحركية لنقطة وتقسم المجموعات إلى:

- متصلة
  - سائلة
  - متماسكة
- غير متصلة

• وجدنا أن علاقات العزم الحركي لجسم صلب يدور حول نقطة منه هي:

$$\sigma_{x_s} = A\,p_s - F\,q_s - E\,r_s$$
$$\sigma_{y_s} = -F\,p_s + B\,q_s - D\,r_s$$
$$\sigma_{z_s} = -E\,p_s - D\,q_s + C\,r_s$$

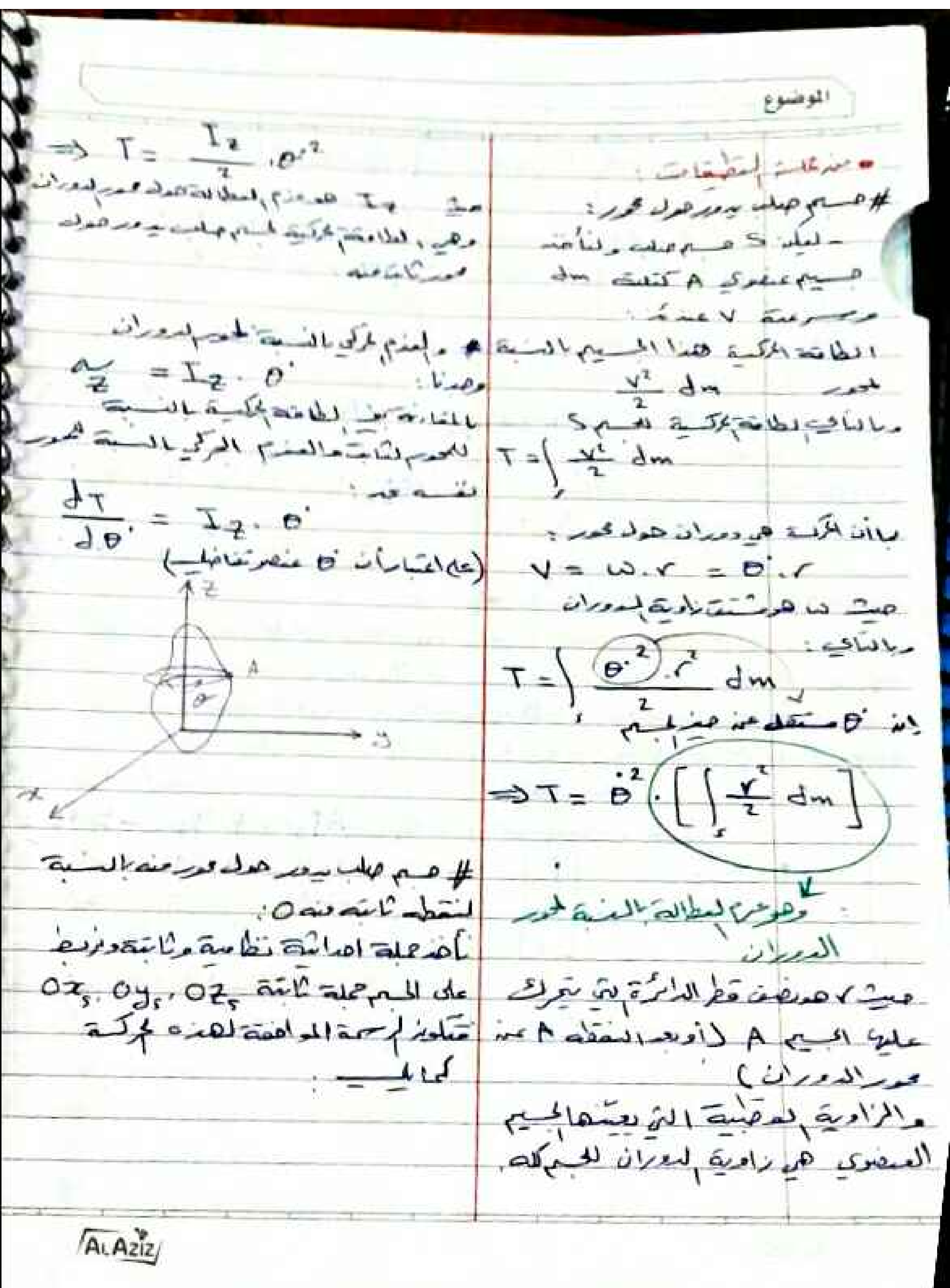
(*)

نضع العلاقات بشكل مصفوفي:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{x_s}\\ \sigma_{y_s}\\ \sigma_{z_s}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & -F & -E\\ -F & B & -D\\ -E & -D & C\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}p_s\\ q_s\\ r_s\end{bmatrix}$$

مصفوفة العطالة ← المصفوفة المربعة

شعاع الدوران ← العمود



الموضوع

• حركات الجسيمات:

جسم صلب يدور حول محور:

- ليكن S جسم صلب ولنأخذ جسيم عنصري A كتلته dm وسرعته v عندئذ:

الطاقة الحركية لهذا الجسيم بالنسبة لمحور $\frac{v^2}{2} dm$

وبالتالي الطاقة الحركية للجسم S

$$T = \int_S \frac{v^2}{2} dm$$

بما أن الحركة هي دوران حول محور:

$$v = \omega . r = \dot{\theta} . r$$

حيث ω هو السرعة الزاوية للدوران

وبالتالي:

$$T = \int_S \frac{\dot{\theta}^2 . r^2}{2} dm$$

إن $\dot{\theta}$ مستقل عن عناصر الجسم

$$\Rightarrow T = \dot{\theta}^2 . \left[\int_S \frac{r^2}{2} dm \right]$$

وهو عزم العطالة بالنسبة لمحور الدوران

حيث r هو نصف قطر الدائرة التي يتحرك عليها الجسيم A (أو بعد النقطة A عن محور الدوران)

والزاوية لحركة التي يقطعها الجسيم العنصري هي زاوية الدوران للجسم كله.

$$\Rightarrow T = \frac{I_z}{2} . \dot{\theta}^2$$

حيث I_z هو عزم العطالة حول محور الدوران وهي الطاقة الحركية لجسم صلب يدور حول محور ثابت فيه

* العزم الحركي بالنسبة لمحور الدوران وجدنا:

$$\sigma_z = I_z . \dot{\theta}$$

بالمقارنة بين الطاقة الحركية بالنسبة للمحور الثابت مع العزم الحركي بالنسبة لمحور نفسه نجد:

$$\frac{dT}{d\dot{\theta}} = I_z . \dot{\theta}$$

(على اعتبار أن $\dot{\theta}$ متغير تفاضلي)

جسم صلب يدور حول محور منه بالنسبة لنقطة ثابتة منه O:

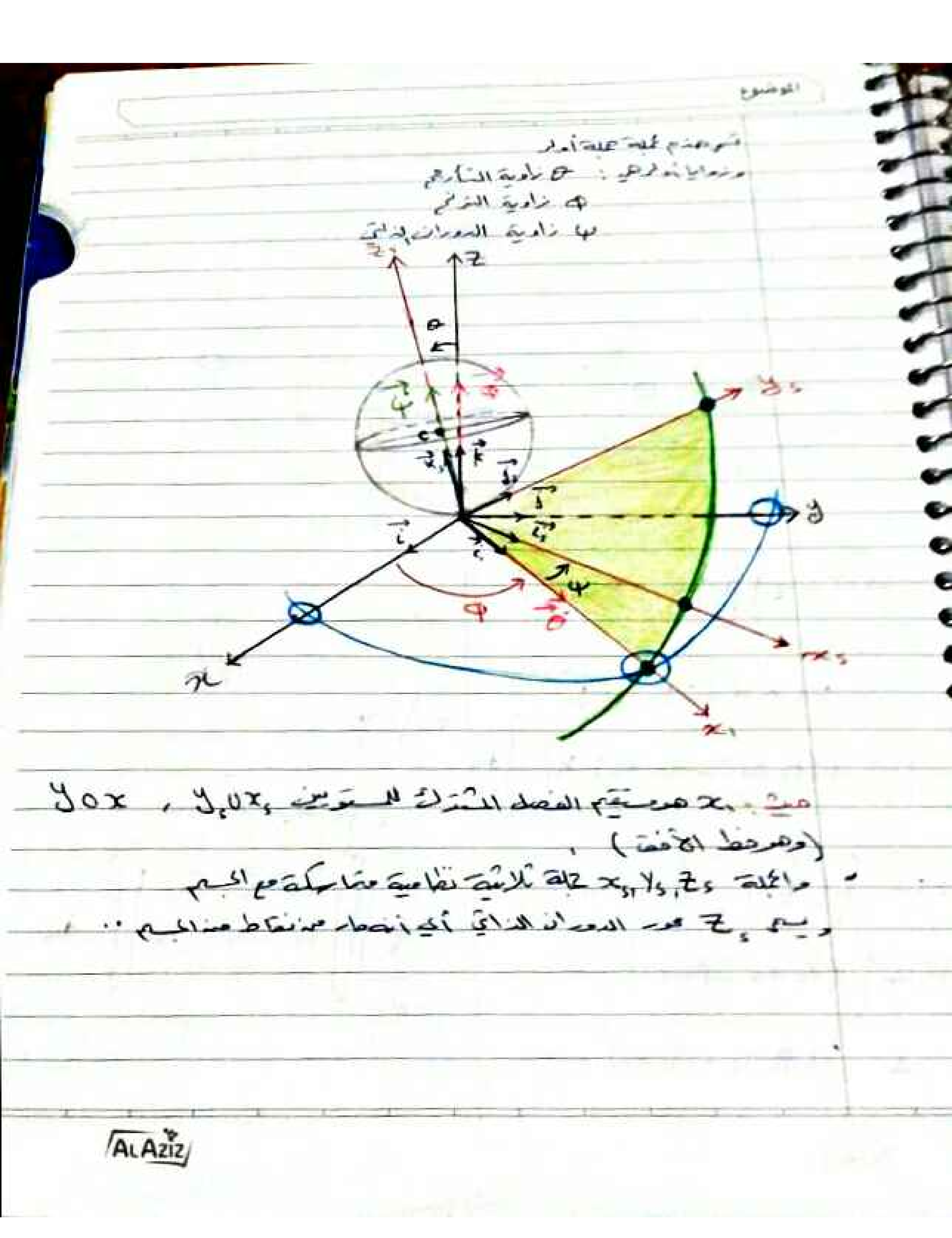
نأخذ جملة احداثية نظامية مرتبطة ومرتبطة على الجسم جملة ثابتة Ox_s, Oy_s, Oz_s فتكون الحركة الموافقة لهذه الحركة كما يلي:

سوف نستخدم لهذا عدة أمور

منها الزوايا: θ زاوية التأرجح

φ زاوية الترنح

ψ زاوية الدوران الذاتي

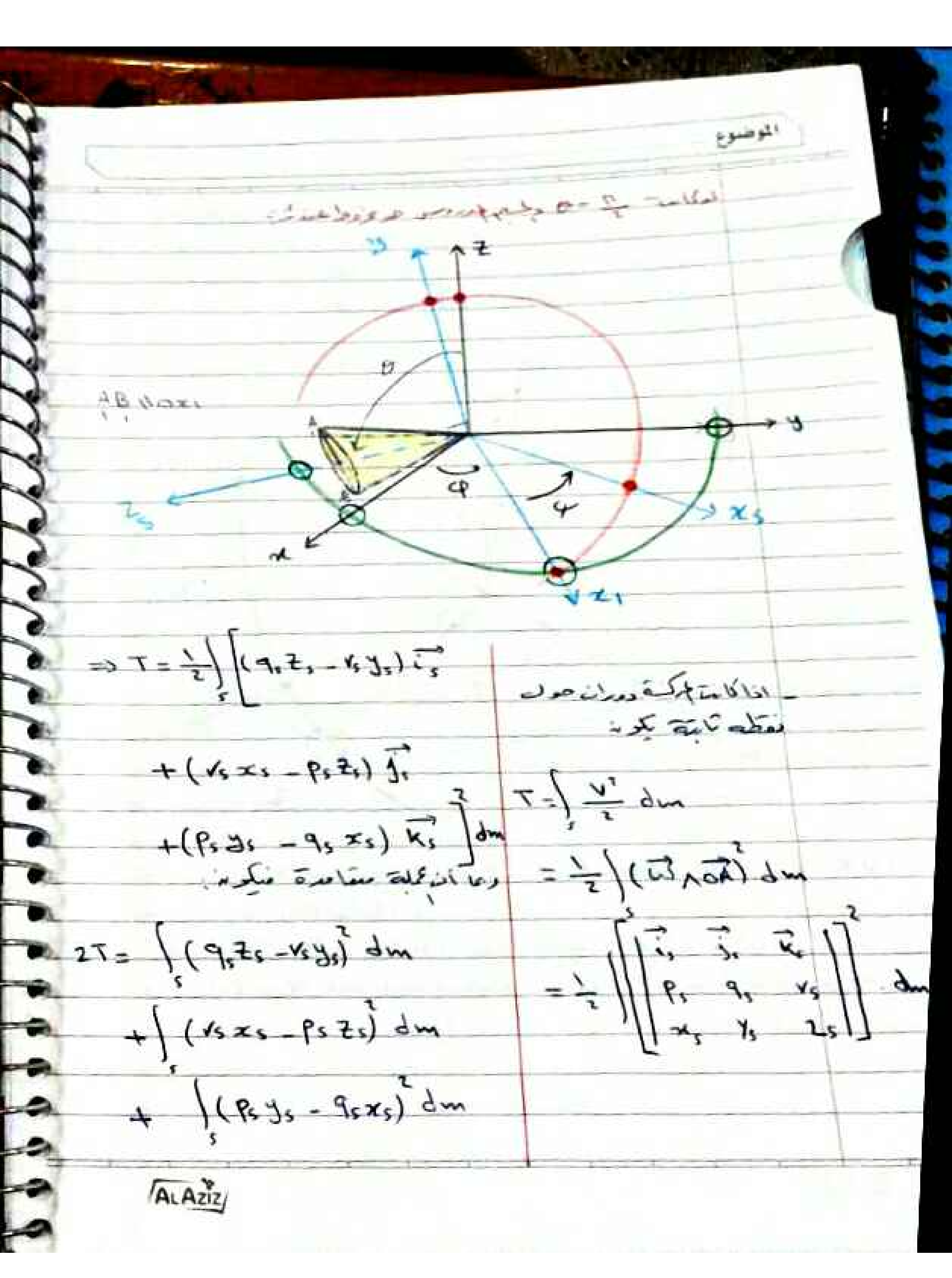


حيث: x_1 هو مستقيم الفصل المشترك للمستويين $x_1 O y_1$ ، xOy

(وهو خط الأفق)

- والجملة x_1, y_1, z_1 جملة ثلاثية نظامية متماسكة مع الجسم

ويسمى z_1 محور الدوران الذاتي أي انقطار من نقاط من الجسم ..



الموضوع

الحالة $\theta = \frac{\pi}{2}$

- اذا كانت الحركة دوران حول نقطة ثابتة يكون:

$$T = \int_s \frac{v^2}{2}\, dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_s \left(\vec{\omega} \wedge \vec{OA}\right)^2 dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_s \left[\begin{vmatrix} \vec{i}_s & \vec{j}_s & \vec{k}_s \\ p_s & q_s & r_s \\ x_s & y_s & z_s \end{vmatrix}\right]^2 dm$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\int_s \Big[(q_s z_s - r_s y_s)\,\vec{i}_s + (r_s x_s - p_s z_s)\,\vec{j}_s + (p_s y_s - q_s x_s)\,\vec{k}_s\Big]^2 dm$$

وبما أن المعلمة متعامدة فيكون:

$$2T = \int_s (q_s z_s - r_s y_s)^2\, dm + \int_s (r_s x_s - p_s z_s)^2\, dm + \int_s (p_s y_s - q_s x_s)^2\, dm$$

$$\Rightarrow 2T = \int \left(q_s^2 z_s^2 + r_s^2 y_s^2 + r_s^2 x_s^2 + p_s^2 z_s^2 + p_s^2 y_s^2 + q_s^2 x_s^2 \right) dm$$

$$-2\int_s z_s y_s \, dm \, q_s r_s$$

$$-2\int_s x_s z_s \, dm \, r_s p_s$$

$$-2\int_s y_s x_s \, dm \, p_s q_s$$

$$\Rightarrow 2T = \int (z_s^2 + y_s^2) \, dm \, p_s^2 \quad [= I_{x_s} = A]$$

$$+ \int (z_s^2 + x_s^2) \, dm \, q_s^2 \quad [= I_{y_s} = B]$$

$$+ \int (y_s^2 + x_s^2) \, dm \, r_s^2 \quad [= I_{z_s} = C]$$

$$-2D q_s r_s - 2E r_s p_s - 2F p_s q_s$$

$$\Rightarrow 2T = A p_s^2 + B q_s^2 + C q_s^2 - 2D q_s r_s - 2E r_s p_s - 2F p_s q_s$$

وباشتقاق الجزئي للعلاقة الأخيرة بالنسبة لـ p_s:

$$\frac{2\partial T}{\partial p_s} = 2A p_s - 2F q_s - 2E r_s$$

بالمقارنة مع العلاقات (*) نجد أن

$$\frac{\partial T}{\partial p_s} = A p_s - F q_s - E r_s = \sigma_{x_s}$$

أي أن σ_{x_s} تساوي المشتق الجزئي للطاقة الحركية بالنسبة لـ p_s

وبالمثل نجد:

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = \sigma_{y_s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r_s} = \sigma_{z_s}$$

أي أن المشتقات الجزئية للطاقة هي مركبات العزم الحركي..

وبالتالي وجدنا:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_s} \\ \sigma_{y_s} \\ \sigma_{z_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_s \\ q_s \\ r_s \end{bmatrix}$$

لو كاملنا لوجدنا:

$$T = \begin{bmatrix} p_s & q_s & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_s \\ q_s \\ r_s \end{bmatrix}$$

يمكن إثبات المعادلة ما يلي:

1) $dT = \vec{\sigma}_0 \cdot d\vec{\omega}$

2) $dT = \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma}_0$

3) $2T = \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}_0$

* إن معادلة سطح ناقص المطاقة

$$Ax_s^2 + By_s^2 + Cz_s^2 - 2D_{y_s z_s} - 2E_{z_s x_s} - 2F_{x_s y_s} = 1$$

- اذا كانت 1< يخرج جسم ناقص المطاقة دون لمس أي مجموعة معروفة.
واذا كانت 1> يخرج الجسم من لمس ويبقى ضمن سطح المطاقة.
اذا كان =1 أي المستوى فقط فالمعادلة ليست معادلة كرة أي سطح ناقصي.
وباشتقاق المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ x ينتج

$$Ax_s - Fy_s - Cz_s = 0$$

وهي مركبات متجه توجيه ناظم هذا السطح الناقصي.

انتهت المحاضرة الثالثة

note
$$x_s = \frac{p_s}{\omega}$$

- نظرية كمية الحركة لمجموعة المادية

اذا كانت M نقطة مادية سرعتها $\vec{V}$
كتلتها m تؤثر عليها قوة $\vec{F}$ (أو محصلة قوى)
وبالتالي
كمية الحركة لها $\vec{P} = m.\vec{V}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

أي أن مشتق كمية الحركة هو القوة المؤثرة

- لو كانت $S=\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ أي مجموعة نقاط مادية عددها n:
نأخذ النقطة M_i سرعتها $\vec{V_i}$، كتلتها m_i
هذه النقاط تؤثر بعضها ببعض بقوى تسمى قوى داخلية
ولتكن $\vec{F_i}^{int}$ محصلة هذه القوى الداخلية على النقطة M_i
و $\vec{F_i}^{ext}$ هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على هذه النقطة وبالتالي
القوة المؤثرة على M_i هي

$$\vec{F_i} = \vec{F_i}^{ext} + \vec{F_i}^{int}$$

وبالتالي

$$\vec{P_i} = m_i . \vec{V_i}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P_i}}{dt} = (\vec{F_i}^{ext} + \vec{F_i}^{int})$$

أي أن مشتق كمية الحركة = مجموع القوى المؤثرة على النقطة M_i

S
M_i
$\vec{F_i}$

AL Aziz